(7)

المحاضرة الخامسة

لكن لدينا معادلة فريدهولم التكاملية

① $g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt$

② $f(x) = \int_a^b K(x,t)\, \omega(t)\, dt$ وبرهان

علماً أن $\omega(t)$ تابع لـ t فقط

ولنفرض أن λ ليست موضعاً صفرياً (ليست قيمة خاصة) عندئذ اثبت أن حل هذه المعادلة يعطى بالدستور التالي

$$g(x) = \int_a^b R(x,t,\lambda)\, \omega(t)\, dt$$

البرهان: حل المعادلة ① بالاعتماد على النتائج الحالي يعطى بالدستور التالي

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\, f(t)\, dt$$

نبدل كل $f(x)$ بما تساويه

$$g(x) = \int_a^b K(x,t)\,\omega(t)\, dt + \lambda \int_a^b \int_a^b R(x,T,\lambda)\, K(T,T_1)\, \omega(T_1)\, dT_1\, dT$$

$$= \int_a^b K(x,t)\,\omega(t)\, dt + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(T_1,T)\, R(x,T_1,\lambda)\, dT_1\right] \omega(t)\, dt$$

حيث يتم تبديل في التكامل الثاني كل T بـ T_1 وكل T_1 بـ T

نبدل داخل القوس

~~بالاعتماد على النظرية~~

$$\lambda \int_a^b K(T_1,T)\, R(x,T_1,\lambda)\, dT_1 = R(x,T,\lambda) - K(x,T)$$

بالتالي نحصل على

$$g(x) = \int_a^b K(x,T)\,\omega(t)\, dT + \int_a^b \left[R(x,T,\lambda) - K(x,T)\right] \omega(T)\, dT$$

بجمع الحدود المتشابهة نحصل على

$$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\, \omega(t)\, dt$$

$g(x) = e^{2x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}$

$= e^{2x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}$

$= e^{2x} + \frac{\lambda}{1-}$

$= e^{2x} + \frac{\lambda}{1-}$

$= e^{2x} + \frac{\lambda}{1-}$

الموافقة نجعل

الصفر نحصل

$1-\lambda=0$

مرافق المعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

$$\psi(x) = f_1(x) + \bar{\lambda} \int_a^b K(T,x)\, \psi(t)\, dT$$

مرافق المعادلة التكاملية المتجانسة

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(T,x)\, \psi(t)\, dt$$

دراسة قابلية الحل في حالة القيم الخاصة

لتكن λ قيمة خاصة للمعادلة التكاملية ولنفرض أن لهذه المعادلة حل $g(x)$ ولنفرض أن مرافق المعادلة التكاملية المتجانسة

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(T,x)\, \psi(T)\, dT \quad (2)$$

نضرب طرفي (1) بأحد الحلول $\psi(x)$ لمرافق المعادلة التكاملية المتجانسة ثم نكامل من $x=a$ الى $x=b$ نجد

$$\int_a^b \psi(x) g(x)\, dx = \int_a^b \psi(x) f(x)\, dx + \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,t)\, \psi(x)\, g(t)\, dx\, dt$$

$$= \int_a^b \psi(x) f(x)\, dx + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x,T)\, \psi(x)\, dx\right] g(t)\, dt$$

نبدل في القوس المشار له في التكامل الثاني كل T بـ x وكل x بـ T

$$= \int_a^b \psi(x) f(x)\, dx + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(T,x)\, \psi(T)\, dT\right] g(x)\, dx$$

بالاعتماد على (2) نحصل على

$$\int_a^b \psi(x) g(x)\, dx = \int_a^b \psi(x) f(x)\, dx + \int_a^b \psi(x)\, g(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, \psi(x)\, dx = 0 \quad (3)$$

وهذا يعني أنه لا يمكن أن يكون للمعادلة التكاملية المعطاة (1) حلاً في هذه الحالة ما لم يحقق التابع $f(x)$ الشرط (3) مع $\psi(x)$ حل كيفي لمرافق المعادلة التكاملية المتجانسة

حل معادلة فريدهولم التكاملية ذات النواة المتردية

أوجد حل معادلة فريدهولم التكاملية ذات النواة المتردية علماً أن

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

$$K(x,T) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t) \quad (2)$$

المطلوب إيجاد حل هذه المعادلة

الحل: نعوض (2) في (1) فنحصل على

~~$g(x) = f(x) + \lambda \int$~~

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_a^b b_i(T)\, g(t)\, dT$$

نفرض أن

$$\int_a^b b_i(t)\, g(t)\, dt = C_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

نبدل (4) في (3) فنحصل

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i\, a_i(x) \quad (5)$$

نعوض (5) في (4) نحصل على

$$\int_a^b b_i(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{j=1}^{n} c_j a_j(t)\right]dt = c_i \qquad i=1,\dots,n$$

$$\int_a^b b_i(t)f(t)\,dt+\lambda\sum_{j=1}^{n} c_j\int_a^b b_i(t)a_j(t)\,dt = c_i$$

$$\int_a^b b_i(t)f(t)\,dt = f_i \qquad i=1,\dots,n$$

$$\int_a^b b_i(t)\,a_j(t) = \alpha_{ij} \qquad i,j=1,\dots,n$$

بالتالي نجد أن

$$f_i+\lambda\sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_{ij} = c_i \qquad (6)$$

~~[illegible]~~ في أجل معادلة تكاملية معروفة تكون النواة $K(x,t)$ معروفة $f(x)$ بالتالي نستطيع حساب f_i و α_{ij} وبذلك تكون ~~[illegible]~~ مجموعة المعادلات الجبرية (6) هي مجموعة معادلات خطية بـ c_i بالتالي حل معادلة فريدهولم التكاملية المعطاة (1) ذات النواة المنحلة يتحول إلى حل مجموعة المعادلات الجبرية الخطية (6) في المجهول c_i

ننشر العلاقة (6) نستطيع أن نكتب

$i=1$; $f_1+\lambda\alpha_{11}c_1+\lambda\alpha_{12}c_2+\dots+\lambda\alpha_{1n}c_n=c_1$

$(1-\lambda\alpha_{11})c_1-\lambda\alpha_{12}c_2-\dots-\lambda\alpha_{1n}c_n=f_1$

~~$c=2$~~

$i=2$; $-\lambda\alpha_{21}c_1+(1-\lambda\alpha_{22})c_2-\dots-\lambda\alpha_{2n}c_n=f_2$

$\vdots$

$i=n$; $-\lambda\alpha_{n1}c_1-\lambda\alpha_{n2}c_2-\dots-(1-\lambda\alpha_{nn})c_n=f_n$

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

• مناقشة الحالات

الحالة الأولى: إذا كان المحدد المعين معه غير مساوي للصفر $\lambda\neq 0$ عندئذ يكون للمعادلات الجبرية المعطاة بالعلاقة (6) حل وحيد $c_1, c_2, \dots, c_n$ نعوض هذه الثوابت التي حصلنا عليها من حل المعادلات الجبرية (6) في هذه الحالة في العلاقة (5) فنحصل على حل وحيد للمعادلة التكاملية المعطاة (1) وإذا كان $f(x)=0$ أي إذا كانت المعادلة التكاملية المعطاة متجانسة عندئذ مجموعة المعادلات الجبرية التي نحصل عليها في هذه الحالة هي عبارة عن معادلات جبرية متجانسة أيضاً $(f_i=0)$ عندئذ في هذه الحالة $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ نبدل هذه القيم في العلاقة (5) الموافقة للمعادلة التكاملية المتجانسة فنحصل على $g(x)=0$

الحالة الثانية اذا كان مميز الاوصل $D(\lambda)=0$
ومن هنا نحصل على النظم الخاصة للمعادلة
التكاملية المعطاة معقدة لا تكون المجموعة
المعادلات الجبرية (6) اعب حلها وتكون لا
عدد غير منته من الحلول (الامر الذي
سنعالجه فيما بعد)

مثال:

اوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = \cos x + \lambda \int_0^{2\pi} [\sin x \cos t - \sin 2x \cos 2t + \sin 3x \cos 3t]\, g(t)\, dt \quad (1)$$

الحل: لدينا

$$K(x,t) = \sin x \cos t - \sin 2x \cos 2t + \sin 3x \sin 3t$$

$a_1(x) = \sin x \quad a_2(x) = \sin 2x \quad a_3(x) = \sin 3x$

$b_1(t) = \cos t \quad b_2(t) = \cos 2t \quad b_3(t) = \sin 3t$

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum c_i a_i(x)$$

$$g(x) = \cos x + \lambda c_1 \sin x + \lambda c_2 \sin 2x + \lambda c_3 \sin 3x \quad (2)$$

نوجد c_1, c_2, c_3

$$f_i + \lambda \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} c_j = c_i \quad i = 1,2,\dots n$$

$i=1: \; f_1 + \lambda\alpha_{11} c_1 + \lambda\alpha_{12} c_2 + \lambda\alpha_{13} c_3 = c_1$

$i=2: \; f_2 + \lambda\alpha_{21} c_1 + \lambda\alpha_{22} c_2 + \lambda\alpha_{23} c_3 = c_2 \quad (3)$

$i=3: \; f_3 + \lambda\alpha_{31} c_1 + \lambda\alpha_{32} c_2 + \lambda\alpha_{33} c_3 = c_3$

$$f_i = \int_0^h b_i(t) f(t)\, dt$$

$$\alpha_{ij} = \int_0^h b_i(t) a_j(t)\, dt$$

$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$

$$f_1 = \int_0^{2\pi} b_1(t) f(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\, dt = \pi$$

$\boxed{f_1 = \pi}$

$$f_2 = \int_0^{2\pi} \cos 2t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int (\cos 3t + \cos t)\, dt = 0$$

$\boxed{f_2 = 0}$

$$f_3 = \int_0^{2\pi} \sin 3t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int (\cos 4t + \cos 2t) = 0$$

$\boxed{f_3 = 0}$

$$\alpha_{11} = \int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt = -\frac{1}{4}\cos 2t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$\boxed{\alpha_{11} = 0}$

$$\alpha_{12} = \int_0^{2\pi} \cos t \sin 2t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin 3t + \sin t)\, dt = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3t - \cos t\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$\boxed{\alpha_{12} = 0}$

$$\alpha_{13} = \int_0^{2\pi} \cos t \sin 3t\, dt = 0$$

$\boxed{\alpha_{13} = 0}$

وبنفس الطريقة نجد

$$\alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{33} = 0$$

نبدل في (3) نجد

$\pi = c_1 \Rightarrow c_1 = \pi$

$0 = c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

$0 = c_3 \Rightarrow c_3 = 0$

5

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

المعادلة تمتلك حل وحيد

بحل المعادلات ④ نحصل على

$C_1 = \pi \quad C_2 = 0 \quad C_3 = 0$

بدل في ② نحصل على

$g(x) = \cos x + 2\pi \sin x$